Programowanie I R

Zadania – seria 10.

Rozwiązywanie równań różniczkowych.

Zadanie 1. `pendulum` **– Wahadło matematyczne.**
Równanie ruchu wahadła matematycznego ma postać

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0,$$

gdzie g jest przyspieszeniem grawitacyjnym, l – długością wahadła, zaś $\theta = \theta(t)$ – zmienną dynamiczną opisującą wychylenie wahadła z położenia równowagi.
Napisz program `pendulum` rozwiązujący równanie ruchu wahadła matematycznego numerycznie (bez stosowania przybliżenia małych drgań). Program powinien wyznaczać wychylenie θ i prędkość kątową $\omega = d\theta/dt$ wahadła o zadanej długości l w przedziale czasowym $t \in [0, t_{max}]$ z krokiem δt dla zadanych warunków początkowych $\theta(0) = \theta_0$ i $\omega(0) = \omega_0$. Jako argumenty wywołania program powinien przyjmować pięć liczb zmiennoprzecinkowych reprezentujących kolejno: długość wahadła l, wychylenie początkowe θ_0, początkową prędkość kątową ω_0, czas trwania symulacji t_{max}, liczbę kroków na którą ma zostać interpolowana symulacja n_{eval}, a także opcjonalny przełącznik określający metodę numerycznego rozwiązywania różniczkowego `method`, zgodnie z opcjami metody `solve_ivp` biblioteki `Scipy`.

Wynikiem działania programu powinno być wypisanie na standardowe wyjście listy czasów oraz odpowiadających im wartości wychylenia i prędkości kątowej oraz narysowanie wykresu przedstawiającego diagram fazowy $\omega = \omega(\theta)$.

Opracowanie: Bartłomiej Zglinicki. Edycja: Bartosz Kasza.

Zadanie 2. `lv` **– Model Lotki–Volterry.**
Rozważmy ekosystem złożony z dwóch oddziałujących ze sobą populacji: drapieżników oraz ich ofiar. Niech $x = x(t)$ będzie liczebnością populacji ofiar, zaś $y = y(t)$ – liczebnością populacji drapieżników. Ewolucję czasową tych wielkości opisują równania Lotki–Volterry:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (a - by)\,x, \\ \dfrac{dy}{dt} = (-c + dx)\,y. \end{cases}$$

Stałe parametry a, b, c i d opisują odpowiednio: naturalny przyrost populacji ofiar, zmniejszanie się populacji ofiar wskutek drapieżnictwa, wzrost populacji drapieżników związany z dostępnością pożywienia oraz naturalne zmniejszanie się populacji drapieżników.

Napisz program `lv` rozwiązujący numerycznie równania Lotki–Volterry. Program powinien wyznaczać liczebność populacji ofiar x i liczebność populacji drapieżników y w przedziale czasowym $t \in [0, t_{\max}]$ z krokiem δt dla zadanych warunków początkowych $x(0) = x_0$ i $y(0) = y_0$ oraz zadanych wartości parametrów a, b, c i d. Jako argumenty wywołania program powinien przyjmować osiem liczb zmiennoprzecinkowych reprezentujących kolejno: parametry a, b, c i d, wartości początkowe x_0 i y_0, czas trwania symulacji $t_{\max}$ i liczbę kroków do ewaluacji n_{eval}. Posłuż się metodą Rungego–Kutty czwartego rzędu.

Wynikiem działania programu powinno być wypisanie na standardowe wyjście listy czasów oraz odpowiadających im liczebności populacji ofiar i drapieżników oraz narysowanie wykresu przedstawiającego zależności $x = x(t)$ oraz $y = y(t)$.

Dla chętnych Napisz program lv_cyrk, która skorzysta z funkcji `nb_solve_ivp` z pakietu `CyRK`. Uwaga, wówczas funkcje generujące prawą stronę równania różniczkowego muszą być udekorowane dekoratorem `njit()` z pakietu `numba`.

Opracowanie: Bartłomiej Zglinicki. Edycja: Bartosz Kasza.