

TIK R – Ćwiczenia z Pythona: Dopasowania z `scipy.optimize`

Zadania zaawansowane

Ćwiczenie 1: Dopasowanie liniowe z przedziałami ufności

Cel: Dopasować prostą do danych z szumem i zrozumieć przedziały ufności wyznaczone z macierzy kowariancji.

1. Wygeneruj dane (x_i, y_i) dla $i = 1, \dots, N$ z zależności liniowej:

$$y = mx + b + \epsilon, \quad \epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2),$$

przy czym σ_i może rosnąć wraz z x_i , np. $\sigma_i = 0.5 + 0.2x_i$.

2. Dopasuj prostą $y = mx + b$ do danych używając metody najmniejszych kwadratów z uwzględnieniem wag σ_i .
3. Wyznacz macierz kowariancji parametrów dopasowania:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_m^2 & \text{cov}(m, b) \\ \text{cov}(m, b) & \sigma_b^2 \end{pmatrix}.$$

Na jej podstawie oblicz standardowy błąd dopasowania w każdym punkcie:

$$\sigma_y(x)^2 = \sigma_m^2 x^2 + \sigma_b^2 + 2 \text{cov}(m, b) x.$$

4. Narysuj dane, dopasowaną prostą oraz przedziały ufności $y \pm \sigma_y(x)$.

Ćwiczenie 2: Fale sinusoidalne przez filtr dolnoprzepustowy

Cel: Wygenerować zbiór fal sinusoidalnych przefiltrowanych przez filtr dolnoprzepustowy (z odpowiednią amplitudą i fazową), dopasować je i wyznaczyć amplitudę oraz przesunięcie fazowe.

1. Zdefiniuj złożoną odpowiedź filtra dolnoprzepustowego pierwszego rzędu:

$$H(f) = \frac{1}{1 + if/f_c}, \quad |H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_c)^2}}, \quad \phi(f) = -\arctan(f/f_c).$$

2. Wygeneruj logarytmicznie rozmieszczoną tablicę częstotliwości f_i obejmującą interesujący zakres filtra.
3. Dla każdej częstotliwości wygeneruj falę sinusoidalną o bazowej amplitudzie A_0 i bazowej fazie ϕ_0 , zmodyfikowaną przez filtr:

$$y_i(t) = A_0 |H(f_i)| \sin(2\pi f_i t + \phi_0 + \phi(f_i)) + \text{szum}.$$

4. Dopasuj każdą falę sinusoidalną do modelu

$$y(t) = A \sin(t + \phi) + B$$

w celu wyznaczenia amplitudy A i fazy ϕ dla każdej częstotliwości.

5. Opcjonalnie: Porównaj wyniki z metodą kwadratury:

$$I = \frac{1}{N} \sum_i y_i \sin(t_i), \quad Q = \frac{1}{N} \sum_i y_i \cos(t_i),$$

$$A = \sqrt{I^2 + Q^2}, \quad \phi = \arctan 2(Q, I).$$

6. Dopasuj model filtra dolnoprzepustowego do otrzymanych amplitud i faz:

$$A(f) = \frac{A_0}{\sqrt{1 + (f/f_c)^2}}, \quad \phi(f) = \phi_0 - \arctan(f/f_c)$$

w celu wyznaczenia A_0 , f_c oraz ϕ_0 .