

TIK R – Ćwiczenia z Mathematica

Zadania 2 - dodatkowe, seria zaawansowana

Ćwiczenie 1: Funkcje anonimowe i operacje funkcyjne

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z notacją funkcji anonimowych (`# &`), podstawowymi zasadami podstawień (`/.`) oraz operacjami zastosowania funkcji (`@`, `/ @`) w środowisku `Mathematica`.

- a) Utwórz prostą funkcję anonimową dodającą 1 do argumentu i zastosuj ją do liczby 5:

$$(\# + 1\&)[5]$$

Porównaj wynik z zapisem przy użyciu `Function[x, x+1]`.

- b) Użyj operatora `@` (Apply) do zastosowania funkcji bez nawiasów:

$$f@x \quad \text{zamiast} \quad f[x]$$

oraz `/ @` (Map) do zastosowania funkcji do listy:

$$f/@\{a, b, c\}$$

Sprawdź różnicę między `@` i `/ @`.

- c) Wykorzystaj reguły podstawień `/.`:

$$(x^2 + y)/.\{x \rightarrow 3, y \rightarrow 2\}$$

a następnie przetestuj zagnieżdżone podstawienia, np.:

$$expr = a^2 + bc; \quad expr/. \{a \rightarrow x + 1, b \rightarrow y, c \rightarrow 2\}$$

- d) Stwórz listę liczb i przekształć ją za pomocą wyrażeń funkcyjnych:

$$(\#^2 + 1\&)/@Range[5]$$

oraz porównaj z użyciem `Map`.

Po wykonaniu ćwiczeń powinieneś rozumieć różnice między `@`, `/ @`, `/.` oraz notacją `# &`.

Ćwiczenie 2: Błądzenie losowe w jednym wymiarze

Celem ćwiczenia jest przygotowanie symulacji jednowymiarowego błędzenia losowego oraz analiza wzrostu wariancji w czasie.

- a) Wygeneruj ciąg kroków x_k z rozkładu Gaussowskiego $\mathcal{N}(0, \sigma)$ dla wybranej wartości σ . Zobrazuj otrzymane kroki na wykresie za pomocą `ListPlot`.

b) Zdefiniuj trajektorię błędzenia losowego jako sumę kolejnych kroków:

$$X(i) = \sum_{k \leq i} x_k$$

i przedstaw ją na wykresie z wykorzystaniem `ListLinePlot`.

- c) Wykonaj kilka (np. 10) niezależnych realizacji błędzenia losowego i narysuj wszystkie trajektorie na jednym wykresie. Zbadaj, jak rozchodzą się różne realizacje procesu.
- d) Dla każdego kroku i oblicz wartość średnią $\langle X(i)^2 \rangle$ z wielu realizacji. Porównaj otrzymane wyniki z teoretycznym przewidywaniem

$$\langle X(i)^2 \rangle = i\sigma^2$$

prezentując oba przebiegi na jednym wykresie.

Przydatne funkcje: `RandomVariate`, `NormalDistribution`, `Accumulate`, `Mean`, `ListLinePlot`.

Ćwiczenie 3: Ewolucja stanu dwupoziomowego

Rozważ ewolucję dwupoziomowego stanu kwantowego (qubitu), zadaną wyrażeniem:

$$\psi(t_1, t_2) = e^{i\sigma_y t_2} e^{i\sigma_x t_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gdzie $\sigma_{x,y,z}$ to macierze Pauliego:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Zdefiniuj macierze Pauliego oraz stan początkowy $\psi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) Zaimplementuj operator ewolucji w postaci:

$$U(t_1, t_2) = e^{i\sigma_y t_2} e^{i\sigma_x t_1}$$

korzystając z funkcji `MatrixExp`.

- c) Oblicz i wyświetl wektor stanu $\psi(t_1, t_2) = U(t_1, t_2)\psi(0)$ dla kilku wartości t_1 i t_2 . Wyznacz moduły elementów wektora oraz ich fazy.
- d) Przygotuj wykresy przedstawiające ewolucję stanu w funkcji t_1 przy ustalonej wartości t_2 , wykorzystując funkcję `Manipulate`. Wykresy powinny prezentować:
- wartości bezwzględne (moduły) składników stanu,
 - względną fazę między składnikami.

Przydatne funkcje: `PauliMatrix`, `MatrixExp`, `Abs`, `Arg`, `Manipulate`, `ListPlot`, `BarChart`.